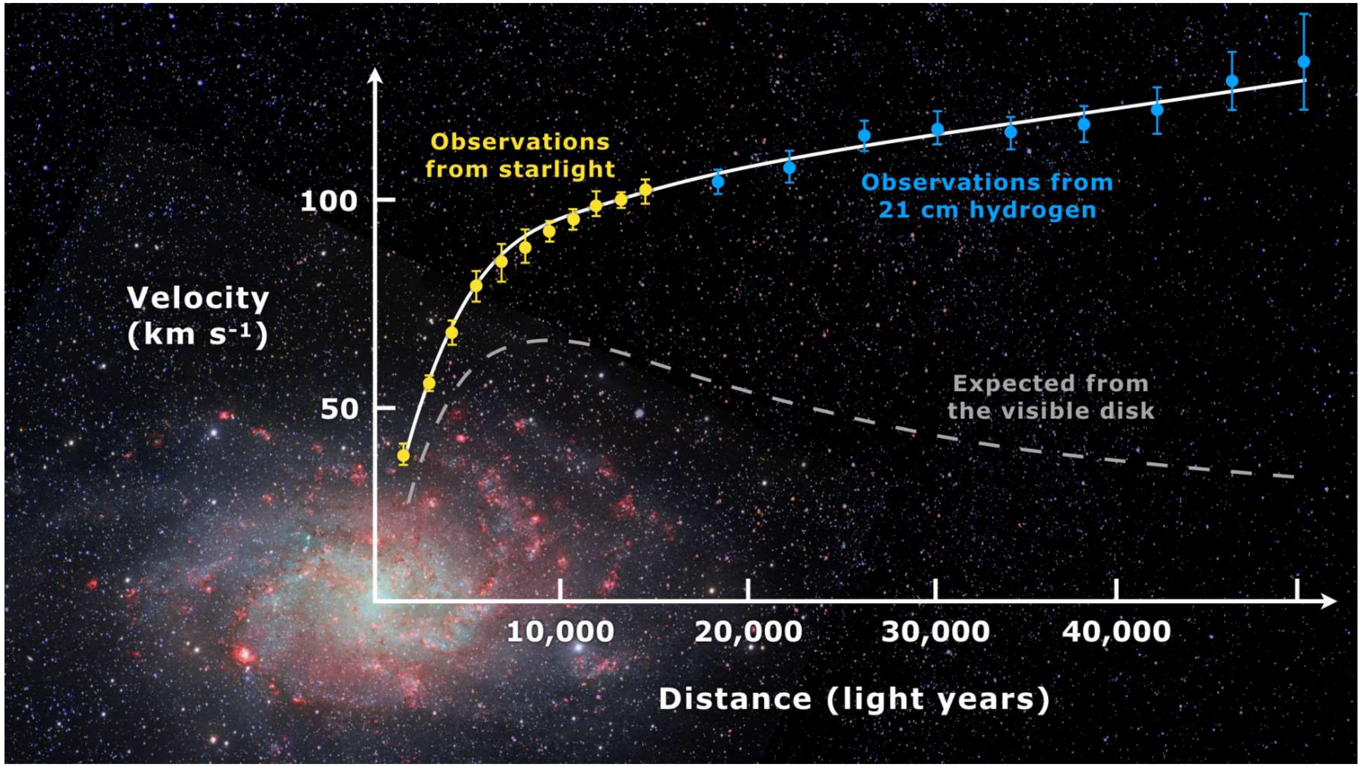
Модель аннигилирующей темной материи для решения проблемы каспов

Студентка 205 группы
Еваровская Злата Вадимовна

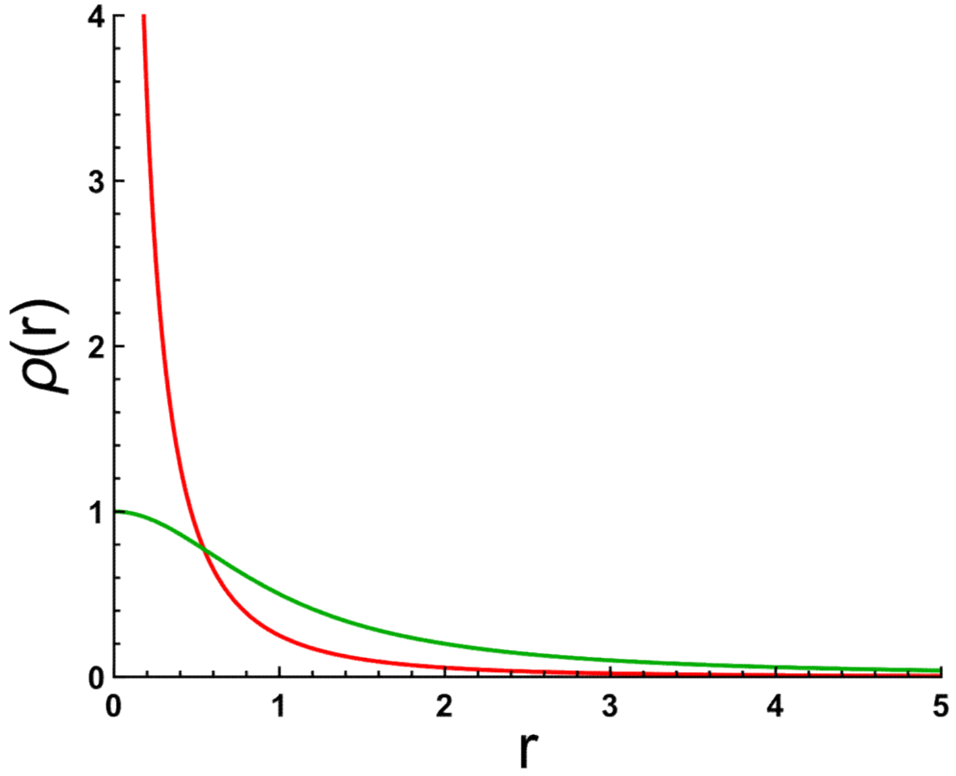
Научный руководитель
Член-корр. РАН,
доктор физ.-мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Проблема



Решение этой проблемы состоит в том, чтобы выдвинуть гипотезу о существовании темной материи и предположить ее распространение от центра галактики к ее гало

Проблема



В численных моделях объемная плотность в центре гало стремится к бесконечности, образуя так называемы центральный касп, в то время как наблюдения, как правило, не обнаруживают резкого возрастания плотности в направлении к центру.

Распределение плотности гало тёмной материи, полученное в рамках теоретического моделирования (NFW профиль, красная кривая) и путём прямых наблюдений (псевдоизотермический профиль, зелёная кривая). Для центральных областей теоретическая зависимость, в отличие от экспериментальных данных, содержит сингулярность.

Решение проблемы

В данной работе мы попытаемся избавиться от каспа, путем рассмотрения модели аннигилирующей темной материи. Будем предполагать, что темная материя учувствует в гравитационном взаимодействии и описывается механикой Ньютона.

Основная система уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho \vec{\vartheta}\right) = 0 \\
\dfrac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial t} + \left(\vec{\vartheta}\,\vec{\nabla}\right)\vec{\vartheta} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} \\
\Delta \varphi = 4\pi G \rho
\end{cases}
$$

Уравнение непрерывности

(закон сохранения массы)

Уравнение Эйлера, векторное

(уравнение движения)

Уравнение Пуассона

(гравитационный потенциал, создаваемый произвольным распределением массы)

Приближения

- Нет давления $p(\rho) = 0$
- Сферически-симметричный случай $\rho(r,t);\ \vec{\vartheta}(r,t);\ \varphi(r);\ \vartheta = \vartheta_\tau$
- Стационарный случай $\rho(r);\ \overrightarrow{\vartheta_\tau}(r);\ \varphi(r)$

Система уравнений

Используя выше приведенные приближения получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} r^2\rho\vartheta_r = 0 \\ \dfrac{\vartheta^2}{r} = \dfrac{d\varphi}{dr} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{dr}\right) = 4\pi G\rho \end{cases}$$

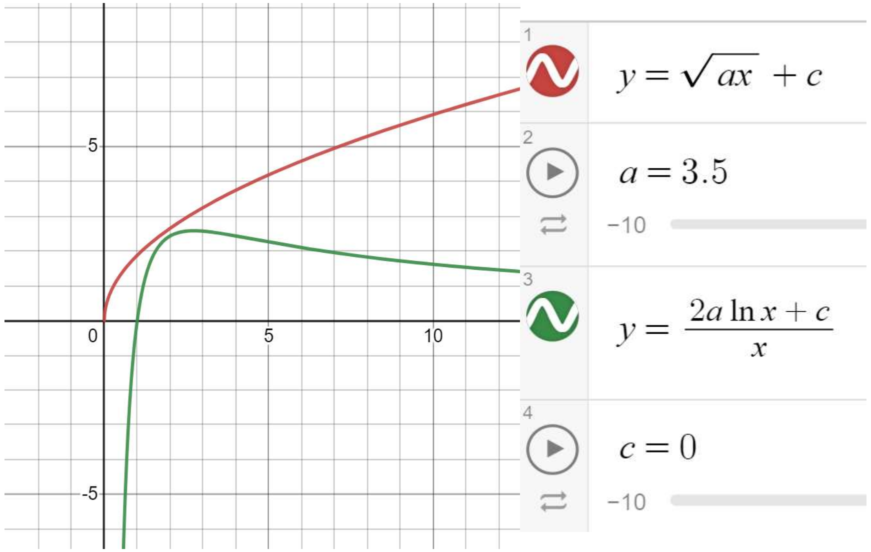
Из системы получим итоговую формулу:

$$\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G\rho r^2$$

Профиль Наварро-Френка-Уайта

Аппроксимация данных, полученных в результате численного моделирования формирования структуры гало в расширяющейся Вселенной привело к модели Наварро-Френка-Уайта.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s}\left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2}$$



Зависимость скорости от радиуса для NFW профиля

Красная кривая - малые r
Зеленая кривая – большие r

Поскольку при $r > 0$ профиль NFW $\rho(r)$ гладкий, то две полученные кривые гладко соединяются для полного решения.

Модель ТМ с аннигиляцией

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho\vec{\vartheta}\right) = -A\rho^2$$

Новое уравнение непрерывности

В правой части уравнения добавится “сток”. Число возможных событий аннигиляции пропорционально квадрату концентрации, а значит и квадрату плотности. Также скорость аннигиляции зависит от сечения реакции.

Константа А характеризует сечение аннигиляции.

Приближения

- Сферически-симметричный случай $\rho(r,t);\ \vec{\vartheta}(r,t);\ \varphi(r);\ \vartheta \neq \vartheta_\tau$

- Стационарный случай $\rho(r);\ \vec{\vartheta}(r);\ \varphi(r)$

- Изотропный случай [2] $\vartheta_r = \vartheta_\tau = \vartheta$

Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G\rho r^2 \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d(r^2\rho\vartheta)}{dr} = -A\rho^2 \end{cases}$$

Такая система позволяет определить зависимости $\rho(r)$ и $\vartheta(r)$. Попробуем найти эти зависимости.

Система уравнений

Выразим из первого уравнения системы ρ и подставим во вторую

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{1}{4\pi G r^2}\dfrac{d(r\vartheta^2)}{dr} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{1}{4\pi G r^2}\dfrac{d(r\vartheta^2)}{dr}\vartheta\right) = -A\left(\dfrac{1}{4\pi G r^2}\dfrac{d(r\vartheta^2)}{dr}\right)^2 \end{cases}$$

Упростим нижнее уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(\vartheta\frac{d(r\vartheta^2)}{dr}\right) = -A\frac{1}{4\pi G r^2}\left(\frac{d(r\vartheta^2)}{dr}\right)^2$$

$$2r\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + 5\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{4r}{\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 + \frac{A}{4\pi G}\left(\frac{\vartheta^2}{r^2} + \frac{4\vartheta}{r}\frac{d\vartheta}{dr} + 4\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2\right) = 0$$

Уравнение для скорости

$$2r\frac{d^2\vartheta}{dr^2}+5\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{4r}{\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2+\frac{A}{4\pi G}\left(\frac{\vartheta^2}{r^2}+\frac{4\vartheta}{r}\frac{d\vartheta}{dr}+4\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2\right)=0$$

Получили нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Даже численное решение такого уравнения требуем специальных методов (из-за сингулярности в нуле).

Приближение

Так как проблема каспов связана с галактиками низкой поверхностной яркости, будем искать приближение для них. Таким образом, не будем учитывать вклад обычной материи на динамику системы.

Скорость вращения, связанная с темной материей во внутренних частях галактик, возрастает примерно линейно с радиусом. [6]

Тогда верно следующее: $$\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = k\frac{d(\vartheta r^2)}{dr}$$

Где k – константа.

Приближение

Возвращаясь к системе и учитывая приближение, получим следующую формулу

$$\begin{cases} \dfrac{d(r\vartheta^2)}{dr} = 4\pi G\rho r^2 \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d(r^2\rho\vartheta)}{dr} = -A\rho^2 \end{cases}$$

$$\frac{d(r\vartheta^2)}{dr} = k\,\frac{d(\vartheta r^2)}{dr}$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho^2}{\vartheta}\left(A + \frac{4\pi G}{k}\right) \longrightarrow \frac{1}{\rho} = \left(A + \frac{4\pi G}{k}\right)\int \frac{dr}{\vartheta}$$

Анализ

Анализируя последнее выражение, можно сказать, что касп пропадает при $0 \le \gamma < 1$, где γ - показатель степенной зависимости скорости от радиуса:

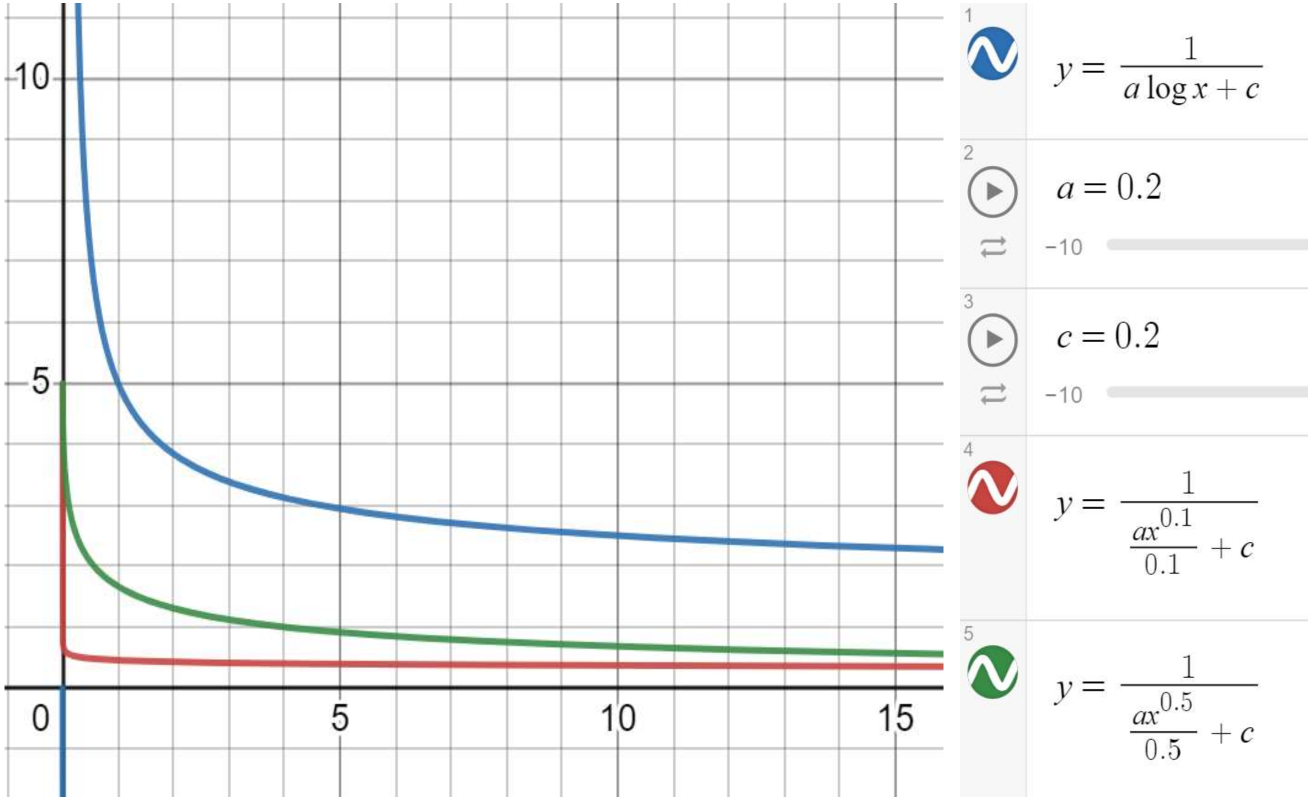
$$\vartheta \propto r^{\gamma} \longrightarrow \vartheta = Br^{\gamma}\text{, где } B = const.$$

Тогда зависимость плотности гало от радиуса с параметром γ будет такой:

$$\rho(r) = \frac{1}{\frac{r^{1-\gamma}}{B(1-\gamma)}\left(\frac{4\pi G}{k} + A\right) + C}$$

где C – константа интегрирования и имеет смысл обратной плотности гало в центе (при $0 \le \gamma < 1$).

Примерный вид зависимостей



- При сколь угодно близкой к линейной, но с показателем степени меньше 1, каспа нет.
- Для линейной – касп есть.

Заключение

- В данной работе были представлены уравнения, описывающие динамику гало темной материи, а также представлены различные варианты приближений.
- Была рассмотрена модель аннигиляции темной материи, построена система, позволяющая получить зависимости $\rho(r)$ и $\vartheta(r)$. Однако полученные уравнения имеют трудности в аналитическом решении.
- Согласно линейному приближению ($\gamma \approx 1$) скоростей на малых радиусах, проанализирована зависимости $\rho(r)$ и $\vartheta(r)$.
- Для $\vartheta \propto r^{\gamma}$ при показателе $0 \leq \gamma < 1$ каспа нет, при $1 \leq \gamma$ – есть. Таким образом, задача требует дальнейшего исследования.

Литература

1. *Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, Simon D.M. White* The Structure of Cold Dark Matter Halos, arXiv:astro-ph/9508025

2. *Дорошкевич А Г, Лукаш В Н, Михеева Е В* "К решению проблем каспов и кривых вращения в гало тёмной материи в космологической стандартной модели" *УФН* **182** 3–18 (2012)

3. https://en.wikipedia.org/wiki/Galaxy_rotation_curve

4. *Засов А В, Сабурова А С, Хоперсков А В, Хоперсков С А* "Тёмная материя в галактиках" *УФН* **187** 3–44 (2017)

5. *Березинский В С, Докучаев В И, Ерошенко Ю Н* "Мелкомасштабные сгустки тёмной материи" *УФН* **184** 3–42 (2014)

6. *W.J.G. de Blok* The Core-Cusp Problem, arXiv:0910.3538 **[astro-ph.CO]**